제8장　각운동량　(Angular Momentum)

8.1 각운동량 연산자와 고유상태
(Angular Momentum Operator and Its eigenstates)

• 궤도 각운동량 연산자 (Orbital Angular Momentum Operator)

고전역학에서 각운동량(Angular Momentum)은 기준점으로부터의 입자의 위치 $\vec{r}$ 과 운동량 $\vec{p}$ 를 써서 다음과 같이 정의된다:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}\ ,\quad \vec{p} = m\vec{v}\ .$$

여기서 m 은 입자의 질량, $\vec{v}$ 는 입자의 속도이다. 우리는 1장에서 양자역학적으로 위치와 운동량은 독립적인 벡터 연산자들이며, 각각의 성분들은 $[x_j, p_k] = i\hbar\delta_{jk}$, $j,k=1,2,3$ 를 만족함을 배웠다. 여기서 x_1, x_2, x_3 는 각각 x, y, z를 표시한다. 이제 각운동량의 고전적인 정의에 위치와 운동량을 연산자로 대응시켜 각운동량 성분들의 교환관계식(commutation relations)을 살펴보도록 하자. 정의된 벡터곱(vector product)은 풀어 쓰면 다음과 같다.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \hat{i}(yp_z - zp_y) - \hat{j}(xp_z - zp_x) + \hat{k}(xp_y - yp_x)$$

이는 각운동량 벡터의 성분들이 위치와 운동량의 성분들로 다음과 같이 표시됨을 보여준다.

$$\vec{L} = \hat{i}L_x + \hat{j}L_y + \hat{k}L_z,$$
$$L_x = yp_z - zp_y,\ \ L_y = zp_x - xp_z,\ \ L_z = xp_y - yp_x.$$

이러한 각운동량 성분 표현은 다음과 같이 하나의 식으로 통합할 수 있다.

$$L_i = \epsilon_{ijk}\, x_j\, p_k\ ,\quad i,j,k = 1,2,3.$$

여기서 ϵ_{ijk} 는 ϵ-텐서로 그 값은 $\epsilon_{123} = 1$, $\epsilon_{132} = -1$ 로 주어지고, 지표(index) i,j,k의 순환 자리바꿈(cyclic permutation)은 동일한 값을 준다($\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = 1, \ldots$). 세 지표들 중에 두 개 이상이 같은 경우 ϵ-텐서의 값은 영이 된다($\epsilon_{112} = \epsilon_{232} = 0, \ldots$).
이제부터는 계산 표현을 간단하게 하기 위하여 동일한 지표들이 두 개 이상 있으면 합을 의미하는 아인슈타인의 합 규약(Einstein's summation convention)을 써서 각운동량 성분(연산자)들 사이의 교환관계를 계산하여 보면, 다음을 얻는다.

$$[L_i, L_j] = [\epsilon_{ilm}\, x_l\, p_m,\ \epsilon_{jnk}\, x_n p_k] = \epsilon_{ilm}\epsilon_{jnk}[x_l\, p_m, x_n\, p_k]$$
$$= \epsilon_{ilm}\epsilon_{jnk}\left\{x_l[p_m,\ x_n p_k] + [x_l, x_n\, p_k]p_m\right\}$$

여기서 $[p_m, p_k] = 0$, $[x_l, x_n] = 0$, $[x_j, p_k] = i\hbar\delta_{jk}$ 의 교환관계식을 적용하고, ϵ-텐서의

성질 $\epsilon_{ilm}\epsilon_{jkm}=\delta_{ij}\delta_{lk}-\delta_{ik}\delta_{lj}$, $\epsilon_{jmk}=-\epsilon_{jkm}=\epsilon_{kjm}$ 등을 사용하면, 위 식은 다시 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[L_i, L_j] = -i\hbar\,\epsilon_{ilm}\epsilon_{jnk}x_l\,p_k\delta_{mn}+i\hbar\epsilon_{ilm}\epsilon_{jnk}\,x_n\,p_m\delta_{lk}$$

$$= i\hbar(\delta_{ij}\delta_{lk}-\delta_{ik}\delta_{lj})\,x_l\,p_k-i\hbar(\delta_{ij}\,\delta_{mn}-\delta_{in}\delta_{mj})\,x_n\,p_m$$

$$= i\hbar(x_i\,p_j-x_j\,p_i)=i\hbar\,\epsilon_{ijk}\,L_k\ .$$

맨 마지막 단계에서는 $L_k=\epsilon_{klm}x_l\,p_m$ 의 관계를 대입하여 $x_i\,p_j-x_j\,p_i=\epsilon_{ijk}\,L_k$ 임을 보일 수 있다: $\epsilon_{ijk}\,L_k=\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{klm}\,x_l\,p_m=(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\,x_l\,p_m=x_ip_j-x_j\,p_i$.
이상은 우리에게 고전역학적 (궤도) 각운동량 연산자의 성분 표현에 위치와 운동량 사이의 양자역학적 교환관계식을 적용하면 다음의 교환관계식을 만족함을 보여준다.

$$[L_i,\,L_j]=i\hbar\epsilon_{ijk}\,L_k\,,\quad i,j,k=1,2,3.$$

즉, $[L_x,\,L_y]=i\hbar\,L_z$, $[L_y,\,L_z]=i\hbar\,L_x$, $[L_z,\,L_x]=i\hbar\,L_y$ 의 교환관계식이 성립한다.

• 각운동량 연산자의 정의, 고유상태와 고유값

(Angular Momentum Operator and its Eigenstates and Eigenvalues)

고전적인 궤도 각운동량의 성분들을 양자역학적으로 표현하여 우리가 위에서 얻은 궤도 각운동량 성분들이 만족하는 교환관계식을 일반화하여 이제 우리는 양자역학적인 각운동량 연산자를 궤도 각운동량 연산자의 교환관계식과 동일한 식에 의하여 정의하고자 한다. 즉, 각운동량 벡터를 $\vec{J}=\hat{i}\,J_x+\hat{j}\,J_y+\hat{k}\,J_z$ 로 정의하고 그 성분들은 다음의 교환관계식에 의하여 정의되도록 한다.

$$[J_x,\,J_y]=i\hbar\,J_z,\ [J_y,\,J_z]=i\hbar\,J_x,\ [J_z,\,J_x]=i\hbar\,J_y\ .$$

여기서 각운동량 연산자는 물리적 관측량(physical observable)이므로 에르미트 연산자가 되어야 하고 이는 J_x, J_y, J_z 를 $J_i\,(i=1,2,3)$로 표시하면 $J_i^\dagger=J_i$ 로 쓸 수 있다. 그리고 각운동량을 정의하는 위의 세 교환관계식은 다음과 같이 하나로 표현할 수 있다.

$$[J_i, J_j]=i\hbar\,\epsilon_{ijk}\,J_k\,,\quad i,j,k=1,2,3.$$

이제 각운동량의 크기에 대응하는 각운동량 연산자의 제곱은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\vec{J}^{\,2}=\vec{J}\bullet\vec{J}=J_x^2+J_y^2+J_z^2\equiv J_iJ_i$$

$\vec{J}^{\,2}$ 은 $\vec{J}$ 를 두 번 곱한 것에 해당하므로 두 연산자는 서로 가환(commute)임을 알 수 있는데, 이는 교환관계식을 사용하여서도 직접 확인할 수 있다.

$$[\vec{J}^{\,2}, J_i]=[J_jJ_j,\,J_i]=J_j[J_j,J_i]+[J_j,J_i]J_j$$

$$=J_ji\hbar\,\epsilon_{jik}J_k+i\hbar\epsilon_{jik}J_kJ_j=i\hbar(\epsilon_{jik}+\epsilon_{kij})J_jJ_k=0$$

한편, 두 연산자의 가환은 두 연산자가 서로 공통의 고유상태를 가질 수 있음을 의미하므로 $\vec{J}^{\,2}$ 은 J_i 는 공통의 고유상태를 가질 것이다. 하지만 J_x, J_y, J_z 들은 서로 간에 가환이 아니므로 우리는 각운동량의 세 성분들 중 하나만 선택하여 $\vec{J}^{\,2}$ 과의 공통의 고유상태를

갖도록 기술할 수 있다. 이제 우리는 관습적으로 $\overrightarrow{J}^2$ 과 J_z 를 가환연산자들의 완전집합(a complete set of commuting operators)으로 취하고, 이 두 연산자 공통의 고유상태들을 찾도록 하겠다. 이 경우, J_x, J_y 는 $\left\{\overrightarrow{J}^2, J_z\right\}$ 연산자 집합과 공통의 고유상태를 가질 수 없고, 그 고유상태들에 변화를 주게 된다. 이제 그러한 효과에 대하여 살펴보기로 하자.

우리가 $J_\pm \equiv J_x \pm i J_y$ 로 정의하면, $(J_-)^\dagger = J_+$, $(J_+)^\dagger = J_-$ 가 되고, J_x, J_y 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-), \quad J_y = -\frac{i}{2}(J_+ - J_-)$$

이를 사용하여 우리는 다음의 교환관계식을 얻는다.

$$[J_+, J_z] = [J_x + iJ_y, J_z] = [J_x, J_z] + i[J_y, J_z] = -i\hbar J_y - \hbar J_x = -\hbar J_+ ,$$
$$[J_-, J_z] = [J_x - iJ_y, J_z] = [J_x, J_z] - i[J_y, J_z] = -i\hbar J_y + \hbar J_x = \hbar J_- .$$

한편, $[\overrightarrow{J}^2, J_+] = [\overrightarrow{J}^2, J_x + iJ_y] = 0$, $[\overrightarrow{J}^2, J_-] = [\overrightarrow{J}^2, J_x - iJ_y] = 0$ 를 만족하고,

$[J_+, J_-] = [J_x + iJ_y, J_x - iJ_y] = [J_x, -iJ_y] + [iJ_y, J_x] = 2\hbar J_z$ 이 된다.

이제 $\overrightarrow{J}^2$ 를 J_x, J_y 대신에 J_+, J_- 를 사용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\overrightarrow{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = \frac{1}{4}(J_+ + J_-)(J_+ + J_-) - \frac{1}{4}(J_+ - J_-)(J_+ - J_-) + J_z^2$$
$$= \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_z^2 = J_-J_+ + \hbar J_z + J_z^2 = J_+J_- - \hbar J_z + J_z^2$$

두 번째 줄에서 우리는 $[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$ 의 관계를 사용하였다.

이제 이러한 교환관계식들로부터 가환연산자 집합 $\left\{\overrightarrow{J}^2, J_z\right\}$의 고유상태 특성에 대해 알아보자. 이를 위해서 우리는 J_z 의 고유상태 ϕ_m 이 다음의 관계를 만족한다고 가정한다.

$$J_z \phi_m = m\hbar\, \phi_m$$

여기서 m은 주어진 어떤 상수이다. 이제 $[J_+, J_z] = -\hbar J_+$, $[J_-, J_z] = \hbar J_-$ 의 관계를 사용하면 ϕ_m에 J_+ 를 작용하고 다시 J_z 를 작용한 $J_z J_+ \phi_m$ 은 다음과 같이 주어진다.

$$J_z J_+ \phi_m = (J_+ J_z + \hbar J_+)\phi_m = J_+(m\hbar\phi_m) + \hbar J_+\phi_m = (m+1)\hbar\, J_+\phi_m$$

이는 주어진 가정으로부터 $J_+\phi_m$ 이 J_z 의 고유상태 ϕ_{m+1} 에 비례함을 보여준다. 즉, J_+ 연산자는 J_z 의 고유상태 ϕ_m을 고유값이 한 단위($\hbar$) 증가한 J_z 의 고유상태 ϕ_{m+1}으로 변환시켜주는 역할을 한다. 이와 같이 고유상태를 한 단계 올리는 연산자를 우리는 올림연산자(raising operator)라고 한다. 마찬가지로 ϕ_m에 J_-를 작용하고 다시 J_z를 작용한 $J_z J_- \phi_m$ 은 다음과 같다.

$$J_z J_- \phi_m = (J_- J_z - \hbar J_-)\phi_m = (m\hbar J_- - \hbar J_-)\,\phi_m = (m-1)\hbar J_- \phi_m$$

즉, $J_-\phi_m$ 은 J_z 의 고유상태 ϕ_{m-1} 에 비례하고, J_- 연산자는 J_z 의 고유상태를 한 단계 내리는 역할을 한다. 그러므로 우리는 J_- 를 내림연산자(lowering operator)라고 한다.

한편, $\overrightarrow{J}^2$ 와 J_z 는 가환이므로 두 연산자가 공통의 고유상태를 가진다고 하였는데, 이

는 다음과 같이 쉽게 볼 수 있다. $[\overrightarrow{J}^2, J_z]\phi_m = 0$, 즉 $\overrightarrow{J}^2 J_z \phi_m = J_z \overrightarrow{J}^2 \phi_m$ 에서 $\overrightarrow{J}^2 J_z \phi_m = m\hbar \overrightarrow{J}^2 \phi_m$ 이므로 $J_z \overrightarrow{J}^2 \phi_m = m\hbar \overrightarrow{J}^2 \phi_m$ 이 됨을 알 수 있다. 이는 $\overrightarrow{J}^2 \phi_m$ 이 J_z의 고유상태로서 ϕ_m에 비례함을 의미한다. 여기서 그 비례상수를 κ 라고 하면 이는 항상 영보다 크다. 이는 다음과 같이 볼 수 있다. $\overrightarrow{J}^2 \phi_m = \kappa \phi_m$ 으로 놓으면,

$< \phi_m | \overrightarrow{J}^2 | \phi_m > = \kappa = < \phi_m | J_x^2 | \phi_m > + < \phi_m | J_y^2 | \phi_m > + < \phi_m | J_z^2 | \phi_m > \geq 0$

이 되는데, 이는 에르미트 연산자의 제곱은 어떤 상태에 대해서도 그 기대값이 영보다 크거나 같아야 하기 때문이다: $< \psi | A^2 | \psi > = < A^\dagger \psi | A\psi > = < A\psi | A\psi > \geq 0$.

그러므로 이제 우리는 $\kappa \equiv \hbar^2 K^2$ 이라고 놓겠다: $\overrightarrow{J}^2 \phi_m \equiv \hbar^2 K^2 \phi_m$.

그런데 위에서 $< \phi_m | J_z^2 | \phi_m > = (m\hbar)^2$ 이고 $< \phi_m | J_x^2 | \phi_m >, < \phi_m | J_y^2 | \phi_m >$ 도 모두 영보다 크거나 같으므로 $\hbar^2 K^2 \geq (m\hbar)^2$ 이 됨을 알 수 있다. 즉, $|K| \geq |m|$ 이다. 여기서 J_z 는 에르미트 연산자이므로 m은 실수이다. 그런데 이 실수 m 의 크기가 어떤 주어진 실수값 $|K|$ 보다 클 수 없음을 위 관계는 보여준다. 즉, $-|K| \leq m \leq |K|$ 의 관계를 만족한다. 때문에 m 이 가지는 최대값과 최소값을 각각 $m_{\max}, m_{\min}$ 이라고 하면, $J_+ \phi_{m_{\max}} = 0$, $J_- \phi_{m_{\min}} = 0$ 이 만족되어야 한다. 이는 J_+, J_- 가 각각 올림과 내림 연산자로서 J_z 의 고유상태 ϕ_m 의 m 값을 각각 하나씩 올리거나 내려야 하는데 $m_{\max}, m_{\min}$ 의 경우는 더 이상 올리거나 내릴 수 없기 때문에 모순이 없으려면, $J_+ \phi_{m_{\max}} = 0$, $J_- \phi_{m_{\min}} = 0$ 이 되어야 한다. 이러한 관계를 적용하여 $\phi_{m_{\max}}$ 에 $\overrightarrow{J}^2$을 적용하면 다음과 같이 된다.

$$\overrightarrow{J}^2 \phi_{m_{\max}} = (J_- J_+ + \hbar J_z + J_z^2) \phi_{m_{\max}} = (m_{\max} \hbar^2 + m_{\max}^2 \hbar^2) \phi_{m_{\max}}$$

$$= m_{\max}(m_{\max} + 1) \hbar^2 \phi_{m_{\max}}$$

여기서 $m_{\max} \equiv j$ 로 놓으면 $\overrightarrow{J}^2 \phi_{j = m_{\max}} = \hbar^2 j(j+1) \phi_{j = m_{\max}}$ 로 쓸 수 있다.

마찬가지로 $\phi_{m_{\min}}$ 에 대해서도 동일하게 계산하면,

$$\overrightarrow{J}^2 \phi_{m_{\min}} = (J_+ J_- - \hbar J_z + J_z^2) \phi_{m_{\min}} = (-m_{\min} \hbar^2 + m_{\min}^2 \hbar^2) \phi_{m_{\min}}$$

$$= m_{\min}(m_{\min} - 1) \hbar^2 \phi_{m_{\min}}$$

이 된다. 그런데 $\overrightarrow{J}^2$ 와 J_- 는 서로 가환이므로 J_- 의 작용에 의한 고유상태의 변화에 대해 $\overrightarrow{J}^2$의 고유값은 바뀌지 않는다. 즉, $\phi_{m_{\max}}$ 에 J_- 를 거듭 작용시켜 $\phi_{m_{\min}}$ 로 변화시켜도 이 상태들에 대한 $\overrightarrow{J}^2$의 고유값은 바뀌지 않고 동일한 값을 갖는다. 이는 다음과 같이 볼 수 있다. 교환관계식 $[\overrightarrow{J}^2, J_\pm]\phi_m = 0$ 에서 $\overrightarrow{J}^2$의 고유상태를 $\overrightarrow{J}^2 \phi_m = \kappa \phi_m$ 로 놓으면 $\overrightarrow{J}^2 J_\pm \phi_m = J_\pm \overrightarrow{J}^2 \phi_m = \kappa J_\pm \phi_m$ 이 되어 ϕ_m과 $J_\pm \phi_m$ 은 동일한 고유값 κ 를

갖는 $\vec{J}^{\,2}$의 고유상태임을 보여준다. 그러므로 $\phi_{m_{\max}}$ 과 $\phi_{m_{\min}}$ 은 $\vec{J}^{\,2}$에 대해 동일한 고유값을 갖는다. 즉, $m_{\max}(m_{\max}+1)\hbar^2 = m_{\min}(m_{\min}-1)\hbar^2$ 이 되어야 한다. 이는 $m_{\max} = -m_{\min}$ 이 되면 만족되므로, $m_{\min} = -j$ 이 된다. 이로부터 우리는 위에서 언급한 m의 범위가 $-j \le m \le j$ 가 되어야 함을 본다. 그런데 $m_{\max} - m_{\min} = 2j$ 이고 $m_{\max}$ 과 $m_{\min}$ 은 1 의 정수 배만큼 차이가 나므로 $2j$는 정수이어야 한다. 그러므로 j는 정수 또는 반정수가 되어야 한다: $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, ...$.

이상의 결과를 정리하면 다음과 같다.

$\vec{J}^{\,2}$ 과 J_z 두 연산자는 공통의 고유상태를 가지며 각각의 고유값은 $j(j+1)\hbar^2$ 과 $m\hbar$ 로 주어진다. 여기서 공통의 고유상태를 두 가지 양자수를 모두 표현한 $\phi_{j,m}$으로 쓰면 다음의 관계를 만족한다.

$$\vec{J}^{\,2}\phi_{j,m} = j(j+1)\hbar^2\phi_{j,m}\,,\quad J_z\phi_{j,m} = m\hbar\,\phi_{j,m}\,,\quad -j \le m \le j \quad (j = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, ...)$$

위에서 우리는 J_+ 나 J_- 가 J_z의 고유상태를 한 단계 올리거나 내리는 역할을 하는 것을 보았다. $J_+\phi_{j,m} \propto \phi_{j,m+1}$, $J_-\phi_{j,m} \propto \phi_{j,m-1}$.

이제 그 비례상수들을 구하여 보자. 먼저 $J_+\phi_{j,m} = C^+_{j,m}\,\phi_{j,m+1}$ 로 놓으면

$$< J_+\phi_{j,m} | J_+\phi_{j,m} > = |C^+_{j,m}|^2 < \phi_{j,m+1} | \phi_{j,m+1} > = |C^+_{j,m}|^2$$

이 되고, $< J_+\phi_{j,m} | J_+\phi_{j,m} > = < \phi_{j,m} | J_-J_+\phi_{j,m} >$ 에 $\vec{J}^{\,2} = J_-J_+ + \hbar J_z + J_z^2$ 을 대입하면

$$< J_+\phi_{j,m} | J_+\phi_{j,m} > = < \phi_{j,m} | \vec{J}^{\,2} - \hbar J_z - J_z^2 | \phi_{j,m} > = j(j+1)\hbar^2 - m\hbar^2 - (m\hbar)^2$$

이 되어 $C^+_{j,m} = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}$ 을 얻는다.

$$J_+\phi_{j,m} = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\;\phi_{j,m+1}\,.$$

동일하게 $J_-\phi_{j,m} = C^-_{j,m}\,\phi_{j,m-1}$ 로 놓고, $< J_-\phi_{j,m} | J_-\phi_{j,m} > = < \phi_{j,m} | J_+J_-\phi_{j,m} >$ 에 $J_+J_- = \vec{J}^{\,2} + \hbar J_z - J_z^2$ 을 적용하면, $C^-_{j,m} = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}$ 을 얻는다.

$$J_-\phi_{j,m} = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\;\phi_{j,m-1}\,.$$